

UCSC | FACULTAD DE INGENIERÍA | MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA

Una Breve Introducción al Método de Elementos Finitos con Aplicaciones a Mecánica de Fluidos

Sergio Caucao

Departamento de Matemática y Física Aplicadas (DMFA)

Grupo de Investigación en Análisis Numérico y Cálculo Científico (GIANuC^2)

Escuela de Matemática Aplicada, Primavera 2023 (EMA-P2023)

Recolectando datos ...

Ingresar a:

www.menti.com

5799 3119

¿Qué entienden por Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales?

Una respuesta a grandes rasgos ...

(I) Dado un modelo matemático (conjunto de Ecuaciones Diferenciales Parciales) que describa un fenómeno físico proveniente de la Mecánica del Medio Continuo, Física, Biología, Química o Ingeniería, obtener una formulación variacional.

(II) Analizar existencia, unicidad y estabilidad de solución.

(III) Proveer aproximaciones numéricas confiables.

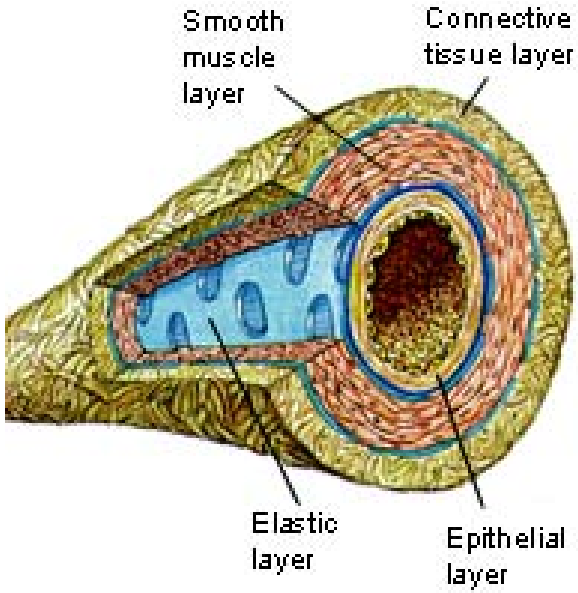
(IV) Ilustrar/Validar los resultados teóricos por medio de ensayos numéricos.

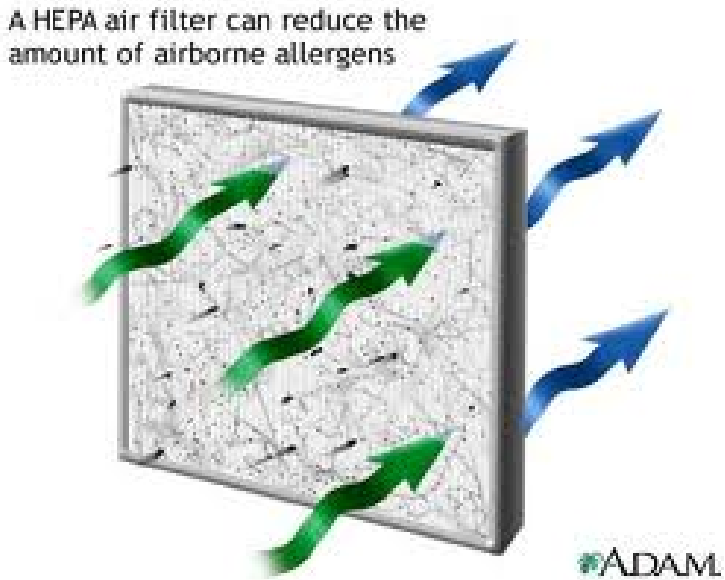
Contenidos

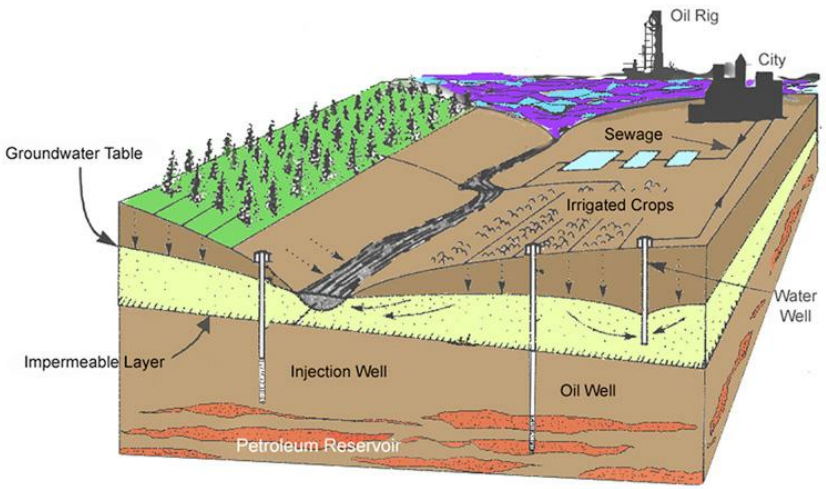
1. Motivación
2. Idea General
3. Poisson 1D con condiciones de contorno Dirichlet homogéneo
4. Ecuación de Darcy: Formulación Primal
5. Ecuación de Darcy: Formulación Mixta
6. Actividad Integradora

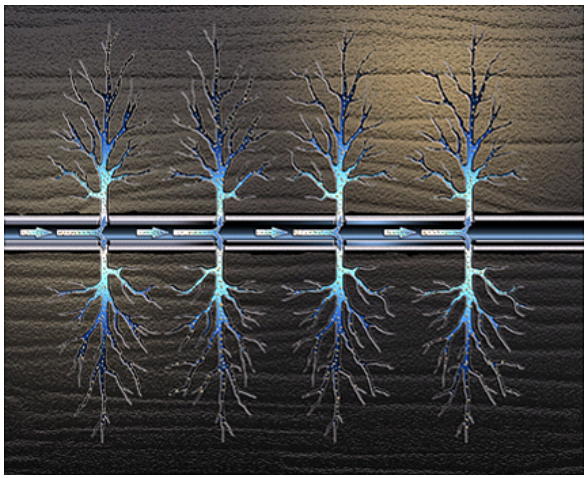
Motivación

Algunos fenómenos físicos en mecánica de fluidos









Ecuaciones de Darcy: presión p, velocidad $\mathbf{u}$

$$-\kappa\,\Delta\,p = f \quad \text{en} \quad \Omega \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \kappa^{-1}\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{en} \quad \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = f & \text{en} \quad \Omega, \end{array} \right. , \quad p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Ecuaciones de Stokes: velocidad $\mathbf{u}$ y presión p

$$-\nu\,\Delta\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Ecuaciones de Brinkman–Forchheimer: velocidad $\mathbf{u}$ y presión p

$$-\nu\,\Delta\,\mathbf{u} + \kappa^{-1}\,\mathbf{u} + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}|\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Ecuaciones de Navier–Stokes

$$-\nu\,\Delta\,\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma\,.$$

Ecuaciones de Navier–Stokes en Ω_f

$$\frac{1}{2\,\mu}\,\mathbf{T}_f^{\mathrm{d}} = \nabla \mathbf{u}_f - \boldsymbol{\gamma}_f(\mathbf{u}_f) - \frac{\rho}{2\,\mu}\,(\mathbf{u}_f \otimes \mathbf{u}_f)^{\mathrm{d}}, \quad -\mathbf{div}(\mathbf{T}_f) = \mathbf{f}_f \quad \text{en} \quad \Omega_f \times (0,T]\,,$$

$$\mathbf{T}_f\mathbf{n}_f = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_f^{\mathrm{N}} \times (0,T], \quad \mathbf{u}_f = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma_f^{\mathrm{D}} \times (0,T]\,,$$

Ecuaciones de Biot en Ω_p

$$-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_p) = \mathbf{f}_p, \quad \mu\,\mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{u}_p + \nabla\, p_p = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega_p \times (0,T],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(s_0\, p_p + \alpha_p\, \mathrm{div}(\boldsymbol{\eta}_p)\right) + \mathrm{div}(\mathbf{u}_p) = q_p \quad \text{en} \quad \Omega_p \times (0,T],$$

$$\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}_p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_p^{\mathrm{N}} \times (0,T], \quad p_p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_p^{\mathrm{D}} \times (0,T],$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p\mathbf{n}_p = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \tilde{\Gamma}_p^{\mathrm{N}} \times (0,T], \quad \boldsymbol{\eta}_p = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \tilde{\Gamma}_p^{\mathrm{D}} \times (0,T],$$

Condiciones de Transmisión sobre $\Gamma_{fp} \times (0,T]$

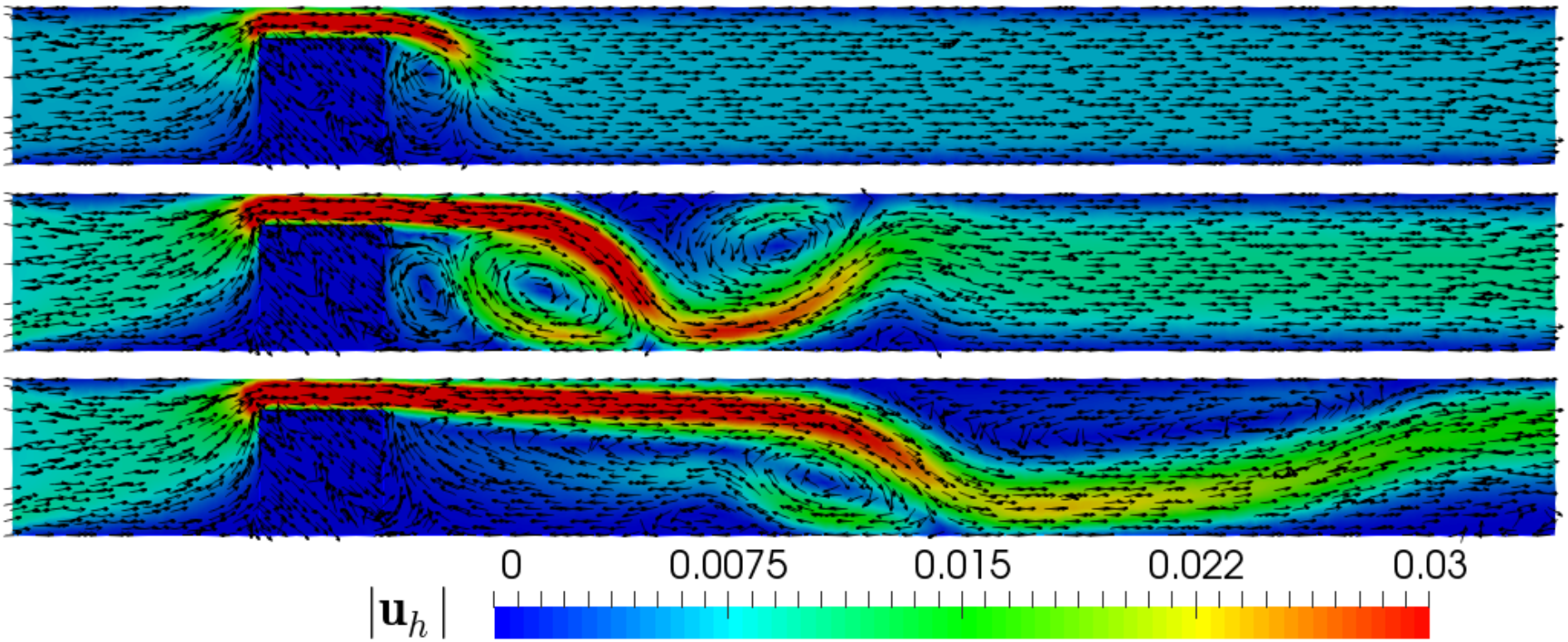
$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n}_f + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}_p}{\partial t} + \mathbf{u}_p\right) \cdot \mathbf{n}_p = 0, \quad \mathbf{T}_f\mathbf{n}_f + \rho(\mathbf{u}_f \otimes \mathbf{u}_f)\mathbf{n}_f + \boldsymbol{\sigma}_p\mathbf{n}_p = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{T}_f\mathbf{n}_f + \rho(\mathbf{u}_f \otimes \mathbf{u}_f)\mathbf{n}_f + \mu\,\alpha_{BJS} \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{\mathbf{K}_j^{-1}} \left(\left(\mathbf{u}_f - \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_p}{\partial t}\right) \cdot \mathbf{t}_{f,j}\right) \mathbf{t}_{f,j} = -p_p\mathbf{n}_f,$$

Problema acoplado de Navier–Stokes–Biot



S. CAUCAO, T. LI, AND I. YOTOV: *An augmented fully-mixed formulation for the quasistatic Navier-Stokes-Biot model*. IMA Journal of Numerical Analysis, to appear. DOI: https://doi.org/10.1093/imanum/drad036



Problema de Brinkman–Forchheimer convectivo

Ecuaciones de Brinkman–Forchheimer convectivas: velocidad $\mathbf{u}$ y presión p

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \kappa^{-1}\mathbf{u} + \mathtt{F}|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Gamma, \quad \int_\Omega p = 0\,.$$



S. CAUCAO AND J. ESPARZA: *An augmented mixed FEM for the convective Brinkman–Forchheimer problem: a priori and a posteriori error analysis*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 438, Art. Num. 115517, (2024).



Flujos magnetohidrodinámicos a través de un medio poroso

Ecuaciones de Brinkman–Forchheimer y Maxwell: velocidad $\mathbf{u}$, presión p, y campo magnético $\mathbf{b}$

$$-\nu\,\Delta\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{u} + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}|\mathbf{u} + \nabla p - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{curl}\,(\mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{f}_f\,, \quad \mathrm{div}(\mathbf{u}) = g_f \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$

$$\frac{1}{\varrho\,\mu}\,\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\,(\mathbf{b})) + \nabla\lambda - \mathrm{curl}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = \mathbf{f}_m\,, \quad \mathrm{div}(\mathbf{b}) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,,$$



L. Angelo, J. Camaño, and S. Caucao: *A five-field mixed formulation for stationary magnetohydrodynamic flows in porous media*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 414, Art. Num. 116158, (2023).





Idea General

Idea General

La idea es reescribir el modelo en un problema de la forma: Dado un *funcional* $F : H \to \mathbb{R}$, hallar $u \in H$ (H de dimensión infinita), tal que

$$a(u, v) = F(v) \qquad \forall\, v \in H,$$

donde $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una *forma bilineal*.

Notemos que, aunque podamos garantizar la existencia y unicidad de solución del problema anterior (ya veremos como), el hecho de que H es de dimensión infinita, no nos permite calcular la solución explícitamente. Pero tenemos análisis cualitativo.

Idea de Galerkin (Boris Galerkin, 1871-1945)



Definimos $H_h \subseteq H$ ($n = dim(H_h)$), y el problema: Hallar $u_h \in H_h$, tal que

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall\, v_h \in H_h\,.$$

Como estamos en dimensión finita, existe una base para H_h tal que:

$$H_h = \langle\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}\rangle\,, \quad u_h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \phi_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\})\,.$$

Notemos que el problema:

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall\, v_h \in H_h\,.$$

Es equivalente a ??:

$$a(u_h, \phi_j) = F(\phi_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,.$$

Luego, el problema original se reduce a: Hallar $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, solución del problema:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a(\phi_i, \phi_j) = F(\phi_j) \quad \forall\, j \in \{1, ..., n\}\,.$$

Notemos que $a(\phi_i, \phi_j) \in \mathbb{R}$ y $F(\phi_j) \in \mathbb{R}$ son computables.

Lo que es equivalente a:

$$\begin{cases} \alpha_1 a(\phi_1,\phi_1) + \alpha_2 a(\phi_2,\phi_1) + \cdots + \alpha_n a(\phi_n,\phi_1) = F(\phi_1) \\ \alpha_1 a(\phi_1,\phi_2) + \alpha_2 a(\phi_2,\phi_2) + \cdots + \alpha_n a(\phi_n,\phi_2) = F(\phi_2) \\ \vdots \\ \alpha_1 a(\phi_1,\phi_n) + \alpha_2 a(\phi_2,\phi_n) + \cdots + \alpha_n a(\phi_n,\phi_n) = F(\phi_n) \end{cases}$$

Escrito matricialmente

$$A\,\vec{\alpha} = \vec{f},$$

con

$$A = (a(\phi_i,\phi_j))_{i,j}, \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^t \quad \text{y} \quad \vec{f} = (F(\phi_1),\ldots,F(\phi_n))^t.$$

¿Qué métodos numéricos conoces para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

Poisson 1D con condiciones de contorno Dirichlet homogéneo

Problema unidimensional sencillo

Hallar u tal que:

$$-u''(x) = \sin(\pi x), \quad \forall\, x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Solución: $u(x) = \dfrac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$.

Problema unidimensional un poco más complejo

Hallar u tal que:

$$-u''(x) = -e^x x(4x^3 - 4x + 1) \quad \forall\, x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Solución: ????.

Primer Problema unidimensional genérico

(P1D) Hallar u tal que:

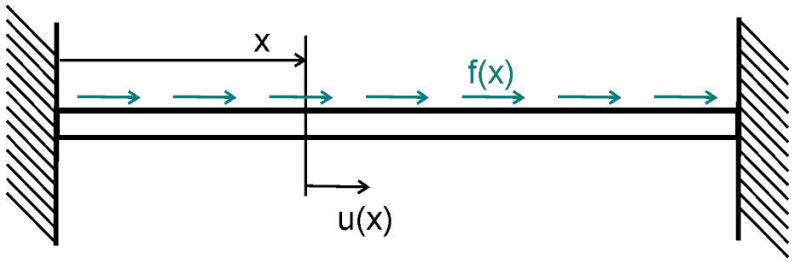
$$-u''(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (0,1)\,,$$

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Observaciones

Notemos que el problema P1D puede describir cualquiera de los siguientes problemas provenientes de la Mecánica del Medio Continuo:

- Viga o barra elástica:



- Cuerda elástica,
- Conducción del calor en una barra.

Primer Paso: Formulación Variacional

Para poder aplicar el método de elementos finitos (MEF), primero debemos obtener la formulación variacional o débil del problema. Para ello, multiplicando la EDO del problema P1D, por una función v tal que $v(0) = v(1) = 0$, e integrando sobre el intervalo (0,1):

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\,.$$

Integrando por partes el primer término vemos que

$$\int_0^1 -u''(x)\,v(x)\,dx = -u'(x)\,\cancel{v(x)}\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx\,,$$

de donde, obtenemos la formulación variacional de P1D: Hallar $u \in H$ tal que:

$$a(u,v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H,$$

donde

$$a(u,v) \;=\; \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{y} \quad F(v) \;=\; \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\,.$$

H es un espacio de funciones con dominio $\Omega = (0,1)$ que se anulan en $x = 0$ y $x = 1$ (H es de dimensión infinita).

Notación: $H = H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \quad v' \in L^2(\Omega) \quad \text{y} \quad v(0) = v(1) = 0 \right\}$.

Observaciones:

- $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}$
- $\|u\|_{1,\Omega} := \left\{ \|u\|_{0,\Omega}^2 + \|u'\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$, con $\|u\|_{0,\Omega} := \left(\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$.

Formulación variacional de P1D

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \quad \text{y} \quad F(v) = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx\,.$$

¿Existe solución?

Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert y $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, acotada (con constante $M > 0$) y H-elíptica (con $\alpha > 0$), es decir:

1. $|a(u,v)| \leq M||u||_H||v||_H, \quad \forall\, u, v \in H$
2. $a(v,v) \geq \alpha||v||_H^2, \quad \forall\, v \in H.$

Entonces, para todo $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H\,.$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

La demostración la ven en detalle en el curso de Análisis Funcional.

Notar que:

- F es lineal y acotado:

$$|F(v)| = \left| \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

- a es una forma bilineal (evidente!). Además, es acotada con constante $M = 1$:

$$|a(u,v)| = \left| \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx \right| \leq \|u'\|_{0,\Omega} \|v'\|_{0,\Omega} \leq M\, \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}\,.$$

- a es $H_0^1(\Omega)-$elíptica, con $\alpha = 2/3$:

$$a(v,v) = \int_0^1 |v'(x)|^2\, dx = |v|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{2}{3}\, \|v\|_{1,\Omega}^2 \;??$$

Luego, el Teorema de Lax-Milgram asegura existencia y unicidad de solución del problema variacional asociado a P1D.

Desigualdad de Friederich-Poincaré

Sea $\Omega = (a,b) \subseteq \mathrm{R}$, y defina $H_0^1(\Omega) := \Big\{ v \in H^1(\Omega) : \quad v(a) = v(b) = 0 \Big\}$. Entonces, se tiene

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq \left(1 + \frac{(b-a)^2}{2} \right) |v|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Segundo Paso: Método de Elementos Finitos

El objetivo del método de elementos finitos (MEF) es buscar una aproximación de la función u en un espacio de dimensión finita H_h (llamado espacio discreto) que satisfaga la formulación variacional con todas las funciones v_h del mismo espacio H_h:

Problema discreto: Hallar $u_h \in H_h$ tal que:

$$a(u_h, v_h) := \int_0^1 u_h'(x)\, v_h'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx =: F(v_h)\,,$$

para todo $v_h \in H_h$.

P1: ¿Existe solución? Sí, y de hecho, dicha solución en única gracias al Teorema de Lax-Milgram.

P2: ¿Cómo calcular u_h? A continuación lo veremos ...

... antes, un poco de historia y contexto ...

- El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una técnica numérica usada ampliamente en el contexto de ingeniería y aplicaciones varias.
- El MEF es capaz de manejar sistemas complejos para los cuales no puede encontrarse soluciones analíticas explícitas.
- Fue primeramente desarrollado en 1943 por Richard Courant, quien utilizó el método de Ritz del análisis numérico y la minimización del cálculo variacional para obtener soluciones aproximadas a sistemas vibrantes.
- Poco tiempo después, un artículo publicado en 1956 por M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, y L. J. Topp estableció una definición más amplia del análisis numérico. El artículo se focalizaba en la **rigidez y la deflexión de estructuras complejas**. De aquí se acuñan los términos: Matriz de Rigidez y Vector de carga.
- La función de aproximación es representada mediante un modelo geométricamente similar consistente de representaciones simplificadas y enlazadas entre sí de regiones discretas, i.e., elementos finitos.

... más historia y contexto ...

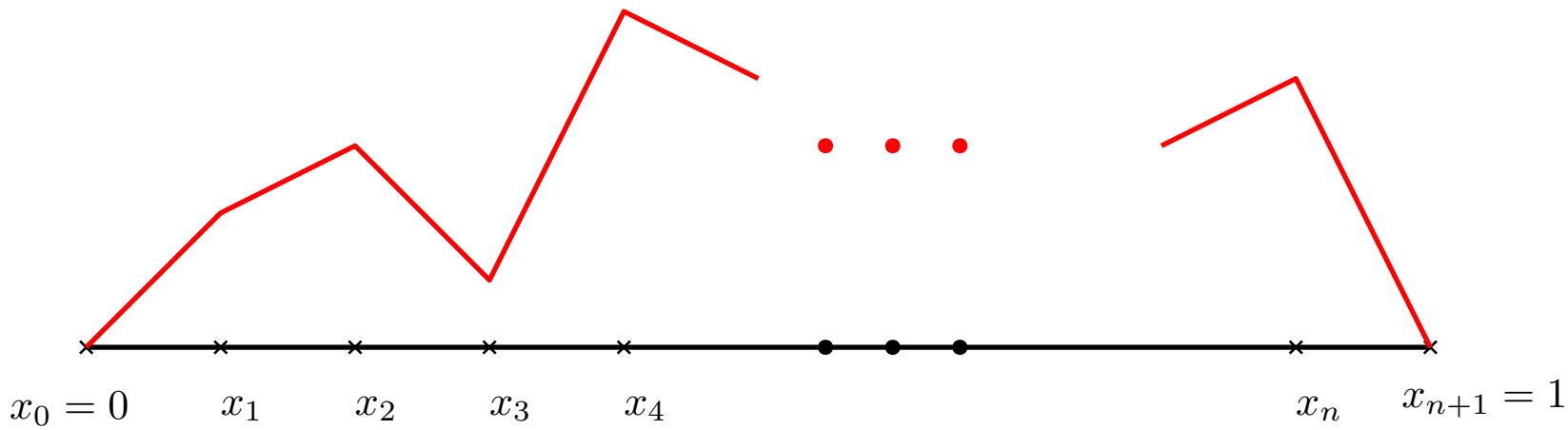
- En cada elemento se aplican las ecuaciones de equilibrio, en conjunto con consideraciones físicas tales como las relaciones de compatibilidad y constitutivas, y se construye así un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas.
- El sistema de ecuaciones se resuelve mediente técnicas de álgebra lineal (método de eliminación, Cholesky, etc.) y, en algunos casos, combinado con métodos numéricos para sistemas no lineales (métodos de Picard, Newton, etc.), según corresponda, entregando el valor de las incógnitas.
- Siendo el MEF un método de aproximación, su precisión puede mejorarse mediante el refinamiento de la malla del dominio en estudio.
- Una aplicación común del MEF es para la determinación de tensiones y desplazamientos en objetos mecánicos y sistemas. Además, también es utilizado en el análisis de muchos otros tipos de problemas, incluyendo aquéllos en transmisión de calor, dinámica de fluidos, y electromagnetismo, entre muchos otros.

Vamos al método ...

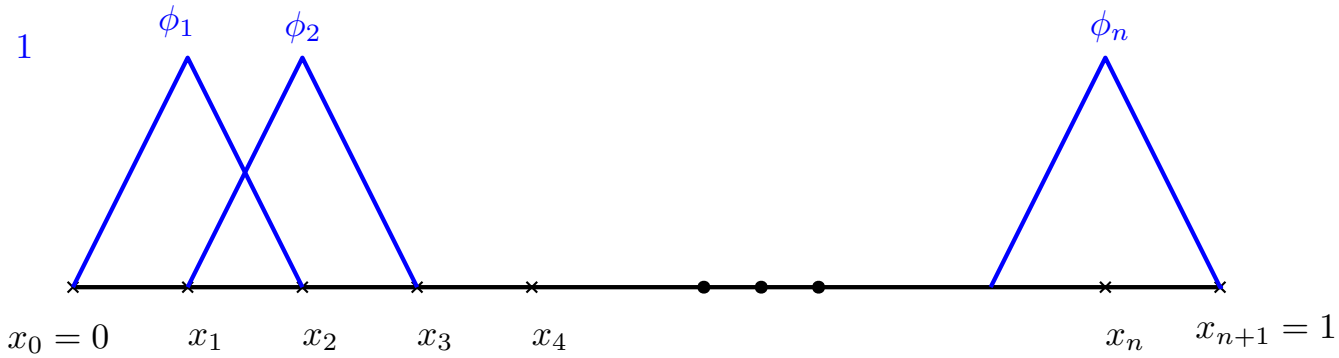
El ejemplo más sencillo de espacio discreto $H_h \subseteq H$ (y el más usado) es el de las funciones continuas y lineales a trozos en una partición arbitraria del intervalo $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$, que se anulan en los extremos 0 y 1, esto es:

$$H_h := \left\{ \begin{array}{l} v_h \in C([0,1]): \quad v_h|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbb{P}_1([x_{j-1},x_j]) \\ \\ \forall\, j \in \{1,\ldots,n+1\}, \quad v_h(0) = v_h(1) = 0. \end{array} \right\},$$

donde $x_0, \ldots, x_{n+1}$ son los puntos o nodos de la partición de $\Omega = (0,1)$, con $h = \max\limits_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1})$,



H_h es de dimension finita $(dim(H_h) = n)$. Por lo tanto, existe una base $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ tal que $H_h = \langle \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \rangle$.



donde las funciones techo, $\phi_1, \ldots, \phi_n$, satisfacen

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } i = j\,, \\ 0\,, & \text{si } i \neq j\,. \end{cases}$$

Asumiendo que la partición del intervalo es uniforme, esto es $h = x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n+1}$ $\forall j \in \{1, \ldots, n+1\}$, deducimos que:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} = \dfrac{x - x_{j-1}}{h} & , \text{ si } x \in [x_{j-1}, x_j]\,, \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} = \dfrac{x_{j+1} - x}{h} & , \text{ si } x \in [x_j, x_{j+1}]\,, \\ 0 & , \text{ de otro modo }. \end{cases}$$

Obtención de Sistema Lineal

Con respecto a esta base, la solución discreta $u_h \in H_h$ puede representarse como

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \phi_i(x), \qquad \text{con } \alpha_i = u_h(x_i) \, .$$

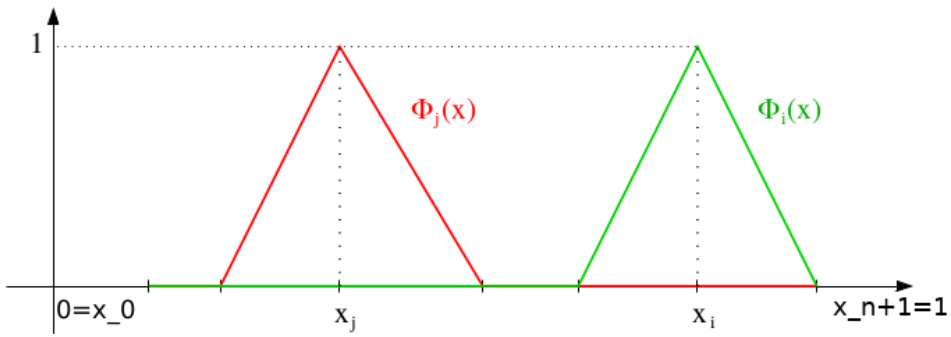
Luego, nuestro problema discreto se reescribe como:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^1 \phi_i'(x) \, \phi_j'(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, \phi_j(x) \, dx, \qquad \forall \, j \in \{1, ..., n\} \, ,$$

o equivalentemente, resolver el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1' \, \phi_1' & \cdots & \int_0^1 \phi_1' \phi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_n' \, \phi_1' & \cdots & \int_0^1 \phi_n' \, \phi_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f \, \phi_1 \\ \vdots \\ \int_0^1 f \, \phi_n \end{pmatrix}$$

Cálculo de la Matriz de Rigidez



De las propiedades de las funciones techo, deducimos que

$$\int_0^1 \phi_i'(x)\,\phi_j'(x)\,dx = 0 \quad \text{si } i \neq \{j-1, j, j+1\}\,.$$

De acuerdo a esto, calculemos la matriz de rigidez:

$$A = \begin{pmatrix} \int_0^1 \phi_1'\,\phi_1' & \int_0^1 \phi_1'\phi_2' & \cdots & 0 \\ \int_0^1 \phi_2'\,\phi_1' & \int_0^1 \phi_2'\,\phi_2' & \int_0^1 \phi_2'\,\phi_3' & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \int_0^1 \phi_{n-1}'\,\phi_n' \\ 0 & \cdots & \int_0^1 \phi_n'\,\phi_{n-1}' & \int_0^1 \phi_n'\,\phi_n' \end{pmatrix} \quad ??$$

Calculemos los términos diagonales:

$$\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_j'(x)\,dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j'(x)\phi_j'(x)\,dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j'(x)\phi_j'(x)\,dx$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{(x - x_{j-1})'}{h}\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{(x_{j+1} - x)'}{h}\right)^2 dx$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{-1}{h}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot x\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} + \frac{1}{h^2} \cdot x\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}$$

$$= \frac{1}{h^2} \cdot h + \frac{1}{h^2} \cdot h = \frac{2}{h}\,.$$

Mientras que los términos sobre la diagonal son:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_{j+1}'(x)\,dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j'(x)\phi_{j+1}'(x)\,dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{(x_{j+1}-x)'}{h}\right)\left(\frac{(x-x_j)'}{h}\right) dx \\
&= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{-1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx \\
&= -\frac{1}{h^2}\cdot x\Big|_{x_j}^{x_{j+1}} \\
&= -\frac{1}{h}\,.
\end{aligned}$$

Similarmente, podemos calcular los términos bajo la diagonal:

$$\int_0^1 \phi_{j+1}'(x)\phi_j'(x)\,dx = -\frac{1}{h}\,.$$

Matriz de Rigidez Global

Así, vemos que la formulación débil discreta se reduce a resolver un sistema de ecuaciones con matriz de rigidez tridiagonal y simétrica:

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} .$$

- ¿Es la única forma de calcular la Matriz de Rigidez Global?
- ¿El cálculo de la Matriz de Rigidez cambia mucho al considerar $\mathbb{P}_2$ o $\mathbb{P}_3$ continuo en lugar de $\mathbb{P}_1$ continuo?
- ¿Qué nos falta para encontrar la aproximación u_h?

Cálculo de el Vector de Carga - Caso 1

Consideremos el caso particular sencillo, $f(x) = \sin(\pi x)$, de donde:

$$\int_0^1 f(x)\,\phi_j(x)\,dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \sin(\pi x)\,\phi_j(x)\,dx$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(\pi x)\,\left(\frac{x - x_{j-1}}{h}\right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(\pi x)\,\left(\frac{x_{j+1} - x}{h}\right) dx$$

$$= \frac{2\sin(\pi x_j) - \sin(\pi x_{j+1}) - \sin(\pi x_{j-1})}{h\pi^2}\,.$$

Cálculo del Vector de Carga - Caso 2

En general, el lado derecho $\int_0^1 f(x)\phi_j(x)\,dx$ no es sencillo de calcular, por lo que se ocupa alguna fórmula de integración numérica apropiada, como:

- Trapecio: $\int_a^b f(x) \approx (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$,
- Simpson: $\int_a^b f(x) \approx \dfrac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4\,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$,
- Trapecio con peso: $\int_a^b f(x) \approx \dfrac{(b-a)}{2}\left(f(p_1)+f(p_2)\right)$, con $p_1 = a + l(b-a)$, $p_2 = b - l(b-a)$, y $l = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$,

Cálculo del Vector de Carga - Caso 2

En particular, utilizando la fórmula de Trapecio con peso para aproximar el lado derecho obtenemos:

$$\int_0^1 f(x)\,\phi_j(x)\,dx$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,\left(\frac{x - x_{j-1}}{h}\right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\left(\frac{x_{j+1} - x}{h}\right) dx$$

$$\approx \frac{h}{2}\left[\Big(f(x_{j-1} + l\,h) + f(x_{j+1} - l\,h)\Big)\,l + \Big(f(x_j - l\,h) + f(x_j + l\,h)\Big)\,(1-l)\right]$$

Tercer Paso: Error y convergencia del método

Estimación del error de Galerkin

Supongamos que $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal acotada (con constante $M > 0$) y H-elíptica (con $\alpha > 0$). Se sigue que para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u,v) \;=\; F(v) \quad \forall\, v \in H\,,$$

y que para todo $F \in H'$, existe un único $u_h \in H_n$ tal que:

$$a(u_h,v_h) \;=\; F(v_h) \quad \forall\, v_h \in H_h\,.$$

Interesa estimar $\|u - u_h\|_H$.

Condición de ortogonalidad

Notar primero que $a(u - u_h, v_h) = 0$ para todo $v_h \in H_h$.

Sea $v_h \in H_h$ arbitrario. Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha\|u-u_h\|_H^2 &\leq a(u-u_h,u-u_h) = a(u-u_h,u-v_h+v_h-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h)\\
&\leq M\|u-u_h\|_H\|u-v_h\|_H\,.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|u-u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|_H \quad \forall\, v_h \in H_h$$

de donde

$$\|u-u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha}\inf_{v_h\in H_h}\|u-v_h\|_H\,.$$

Esta estimación se conoce como **"Estimación de Cea"**.

Utilidad de la estimación de Cea

Si somos capaces de construir una familia de operadores de "interpolación" $\Pi_h : H \to H_h$, los cuales satisfacen

$$||v - \Pi_h(v)||_H \leq e(n)||v|| \quad \forall\, v \in H\,,$$

con $e(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, entonces de la estimación de Cea se tiene:

$$||u - u_h||_H \leq \frac{M}{\alpha}||u - v_h||_H \quad \forall\, v_h \in H_h\,.$$

En particular, para $v_h = \Pi_h(u)$ se tiene:

$$||u - u_h||_H \leq \frac{M}{\alpha}||u - \Pi_h(u)||_H \leq \frac{M}{\alpha}e(n)||u|| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Por lo tanto, el error tiende a cero si la dimensión del espacio tiende a infinito.

Convergencia del Método

Consideremos el Interpolante de Lagrange:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h^1 \quad : C(\overline{\Omega}) \quad &\to \quad \mathbb{P}_1 \\ v \quad &\mapsto \quad \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\phi_j \end{aligned}$$

Si $v \in H^2(\Omega)$ entonces se tienen las siguientes propiedades de aproximación:

$$\|v - \mathcal{I}_h^1(v)\|_{0,\Omega} \leq C\, h^2\, |v|_{2,\Omega} \quad \text{y} \quad \|v - \mathcal{I}_h^1(v)\|_{1,\Omega} \leq C\, h\, |v|_{2,\Omega}\,.$$

Las demostraciones respectivas se ven en el curso Teoría de Elementos Finitos.

Tasa de Convergencia

Asumamos $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solución del problema continuo y sea u_h nuestra aproximación por elementos finitos $\mathbb{P}_1$ continuo. Entonces, existe $C > 0$, independiente de h, tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C\, h\, |u|_{2,\Omega}\,.$$

Cálculo del error en norma $L^2(\Omega)$

Notemos que el error en $L^2(\Omega)$ está dada por la norma:

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \left(\int_0^1 |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Por lo que, usando la regla de Simpson obtenemos

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx \approx \frac{h}{6} \left[|u(x_{j-1}) - u_h(x_{j-1})|^2 + 4 \left| u\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) - u_h\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) \right|^2 + |u(x_j) - u_h(x_j)|^2 \right].$$

Notar que $u_h\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(u_h(x_{j-1}) + u_h(x_j) \right)$??

Cálculo del error en norma $H^1(\Omega)$

Notemos que el error en $H^1(\Omega)$ está dada por la norma:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = \left(\int_0^1 |u(x) - u_h(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |u'(x) - u_h'(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Luego, usando diferencia finita para aproximar $u_h'(x)$ en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, esto es, $u_h'(x_j) \approx \dfrac{u_h(x_j) - u_h(x_{j-1})}{h} =: du_h$, vemos que nos falta calcular el término:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |u'(x) - u_h'(x)|^2 \, dx \approx \frac{h}{6} \left[|u'(x_{j-1}) - du_h(x_{j-1})|^2 \right.$$

$$\left. + 4 \left| u'\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) - du_h\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \right|^2 + |u'(x_j) - du_h(x_j)|^2 \right]$$

Notar que como estamos aproximando u_h con polinomios $\mathbb{P}_1$, se tiene que:

$$du_h(x_{j-1}) = du_h(x_j) = du_h\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) = du_h,$$

puesto que la derivada de u_h en el intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ es constante.

Tasa de convergencia del método

A nivel teórico, en el curso de Teoría de Elementos Finitos, se demuestra que dadas dos particiones del intervalo de estudio $\Omega = (0, 1)$, con tamaños de mallas h_{n-1} y h_n, respectivamente, se tienen las estimaciones del error

$$\|u - u_{n-1}\| \leq C\, h_{n-1}^r |u|_{1+r,\Omega} \approx C\, h_{n-1}^r \quad \text{y} \quad \|u - u_n\| \leq C\, h_n^r |u|_{1+r,\Omega} \approx C\, h_n^r \,,$$

donde r es el orden de convergencia del método dependiendo de la norma con la que es medida el error, el grado polinomial utilizado para dicha aproximación y el interpolante utilizado (Interpolante de Lagrange).

De lo anterior, es fácil ver que

$$\frac{\|u - u_n\|}{\|u - u_{n-1}\|} \approx \left(\frac{h_n}{h_{n-1}}\right)^r \,,$$

por lo que, el órden de convergencia del método resulta

$$r \approx \log\left(\frac{\|u - u_n\|}{\|u - u_{n-1}\|}\right) / \log\left(\frac{h_n}{h_{n-1}}\right) \,.$$

Consideremos el caso $\mathbb{P}_1$

De las propiedades de aproximación del Interpolante de Lagrange:

$$\|v - \mathcal{I}_h^1(v)\|_{0,\Omega} \leq C\, h^2\, |v|_{2,\Omega} \quad \text{y} \quad \|v - \mathcal{I}_h^1(v)\|_{1,\Omega} \leq C\, h\, |v|_{2,\Omega}\,,$$

deducimos que:

- Si la norma considerada para medir el error es $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ entonces $r \approx 1$.
- Aunque la estimación del error es obtenida en norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, podemos verificar computacionalmente que al medir el error en norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ se tiene $r \approx 2$.

Lo anterior lo verificaremos utilizando las fórmulas:

- $r_1 \approx \log\left(\dfrac{\|u - u_n\|_{1,\Omega}}{\|u - u_{n-1}\|_{1,\Omega}}\right) / \log\left(\dfrac{h_n}{h_{n-1}}\right)$
- $r_2 \approx \log\left(\dfrac{\|u - u_n\|_{0,\Omega}}{\|u - u_{n-1}\|_{0,\Omega}}\right) / \log\left(\dfrac{h_n}{h_{n-1}}\right)$.

Llegó la hora de programar!!!



Ecuación de Darcy: Formulación Primal

Problema modelo

$$-\kappa\,\Delta p = f \quad \text{en} \quad \Omega\,, \quad p = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\,.$$

- p: presión.
- $\kappa > 0$: permeabilidad.
- $\Omega \subseteq \mathrm{R}^2$: dominio poligonal.
- $\partial\Omega$: frontera de Ω.
- $f \in L^2(\Omega)$

Recordemos la primera identidad de Green (Integración por partes). Si p y q son suficientemente suaves, se tiene:

$$\int_\Omega \Delta p\, q = \int_{\partial\Omega} (\nabla p \cdot n)\, q\, ds - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n}\, q\, ds - \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q\,.$$

Formulación variacional (primer paso)

De lo anterior:

$$-\kappa \int_\Omega \Delta p\, q = -\kappa \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial n} \cancel{q}\, ds + \kappa \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q = \kappa \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q\,.$$

Así, obtenemos la formulación variacional: Hallar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(p,q) := \kappa \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q \;=\; \int_\Omega f\, q =: F(q) \qquad \forall\, q \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Tiene solución?

Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert y $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal, acotada (con constante $M > 0$) y H-elíptica (con $\alpha > 0$), es decir:

1. $|a(u,v)| \leq M||u||_H||v||_H, \quad \forall\, u, v \in H$
2. $a(v,v) \geq \alpha||v||_H^2, \quad \forall\, v \in H.$

Entonces, para todo $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que:

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall\, v \in H\,.$$

Además,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Notar que:

- F es lineal y acotado:

$$|F(q)| = \left| \int_\Omega f\, q \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|q\|_{1,\Omega} \quad \forall\, q \in H_0^1(\Omega)\,.$$

- a es una forma bilineal (evidente!). Además, es acotada con $M = \kappa$:

$$|a(p,q)| = \kappa \left| \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q \right| \leq \kappa\, \|\nabla p\|_{0,\Omega} \|\nabla q\|_{0,\Omega} \leq M\, \|p\|_{1,\Omega} \|q\|_{1,\Omega},$$

- a es $H_0^1(\Omega)-$elíptica:

$$a(q,q) = \kappa \int_\Omega |\nabla q|^2 = \kappa\, |q|_{1,\Omega}^2 \geq \alpha\, \|q\|_{1,\Omega}^2 \;??$$

Luego, el Teorema de Lax-Milgram asegura existencia y unicidad de solución del problema variacional.

Desigualdad de Friederich-Poincaré

Sea Ω un abierto de R^n, acotado en alguna dirección coordenada. Entonces, existe $C_P = C_P(\Omega) > 0$ tal que:

$$|v|_{1,\Omega}^2 \geq C_P\, ||v||_{1,\Omega}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Método de Elementos Finitos (segundo paso)

Espacio de Elementos Finitos:

$$H_h := \left\{ q_h \in C(\bar{\Omega}) : \quad q_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\}$$

$$H_{h,0} := H_h \cap H_0^1(\Omega)$$

Problema discreto: Hallar $p_h \in H_{h,0}$ tal que

$$a(p_h, q_h) := \kappa \int_\Omega \nabla p_h \cdot \nabla q_h = \int_\Omega f\, q_h =: F(q_h) \qquad \forall\, q_h \in H_{h,0}\,.$$

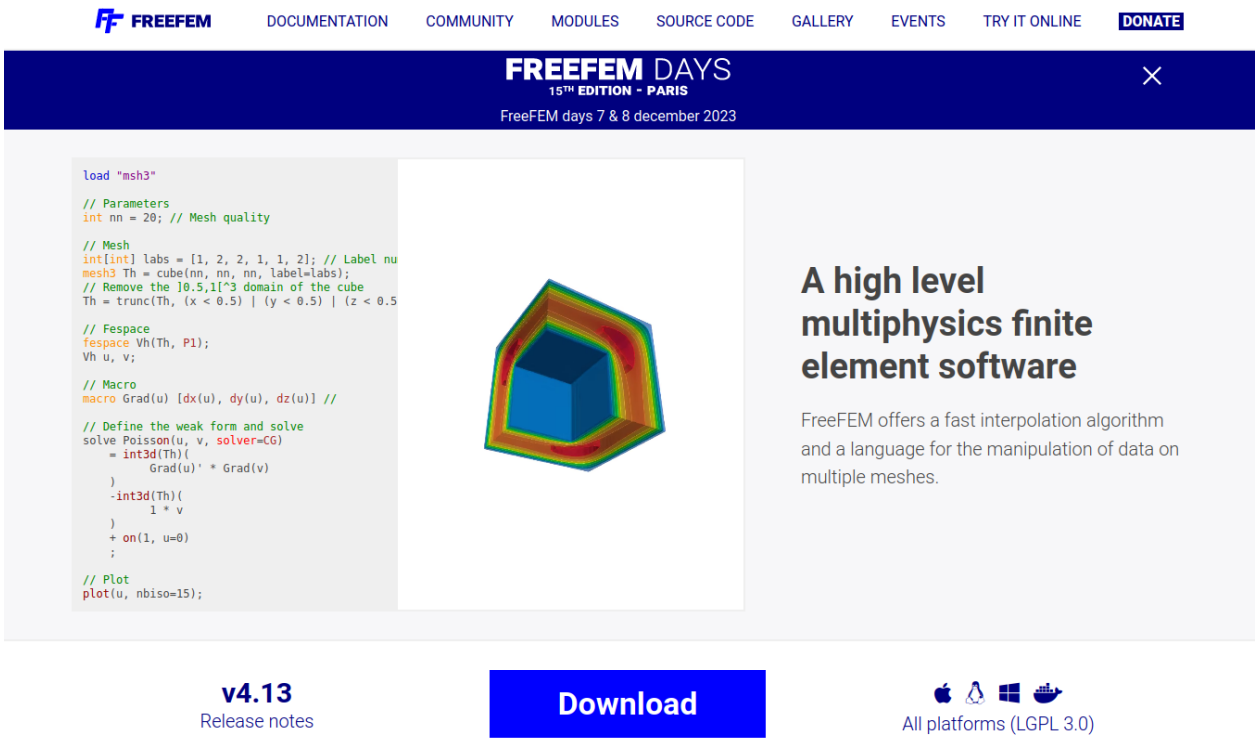
P1: Tiene solución?

P2: Como calcular p_h?

P3: $\|p - p_h\|_{1,\Omega}$? Orden de convergencia $\mathcal{O}(h^k)$?

A programar con FreeFem++

FreeFem++ es un toolbox para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Creado y desarrollado desde 1987. Su sitio oficial es: http://www.freefem.org.





Creador: **Frédéric Hecht**

Algunos datos ...

1. Los programas creados con freefem pueden usarse para resolver problemas en multifísica en 2D y 3D.
2. FreeFem++ es escrito en C++. Puede ser considerado como un lenguaje de programación en sí mismo.
3. Es multiplataforma, se puede instalar en sistemas operativos: MacOS, Windows, y Linux.
4. Podemos utilizar cualquier editor de texto plano: vi, vim, nano, gedit, xed, etc.
5. En linux-mint, lo podemos instalar como: sudo apt-get install FreeFem++.
6. En general, lo podemos descargar desde el sitio oficial: http://www.freefem.org
7. Alternativamente, podemos descargar un entorno integrado para FreeFem++: FreeFem++-cs

Manos al código ... iniciemos con nuestro primer programa ...

Ejemplo 2D - Tasa de Convergencia para Formulación Primal

Solución para corroborar tasa de convergencia teórica

- $\Omega := (0,1) \times (0,1)$
- $\kappa = 1$
- $p(x,y) = \cos(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y)$
- $p_x(x,y) = -\pi\ \sin(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y)$
- $p_y(x,y) = \pi\, \cos(\pi\, x)\, \cos(\pi\, y)$
- $f = -\kappa\, (p_{xx}(x,y) + p_{yy}(x,y))$

Ecuación de Darcy: Formulación Mixta

Formulación Mixta

Problema de Darcy en formulación mixta

$$\mathbf{u} = -\kappa \nabla p \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = f \quad \text{en} \quad \Omega, \quad p = p_D \quad \text{en} \quad \Gamma$$

$$\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) := \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \right\}, \text{ con } \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Formulación variacional

Hallar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_\Omega p \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= -\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle_\Gamma \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega), \\ -\int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= -\int_\Omega f\, q \quad \forall\, q \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$



G.N. GATICA, *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, Cham, 2014.

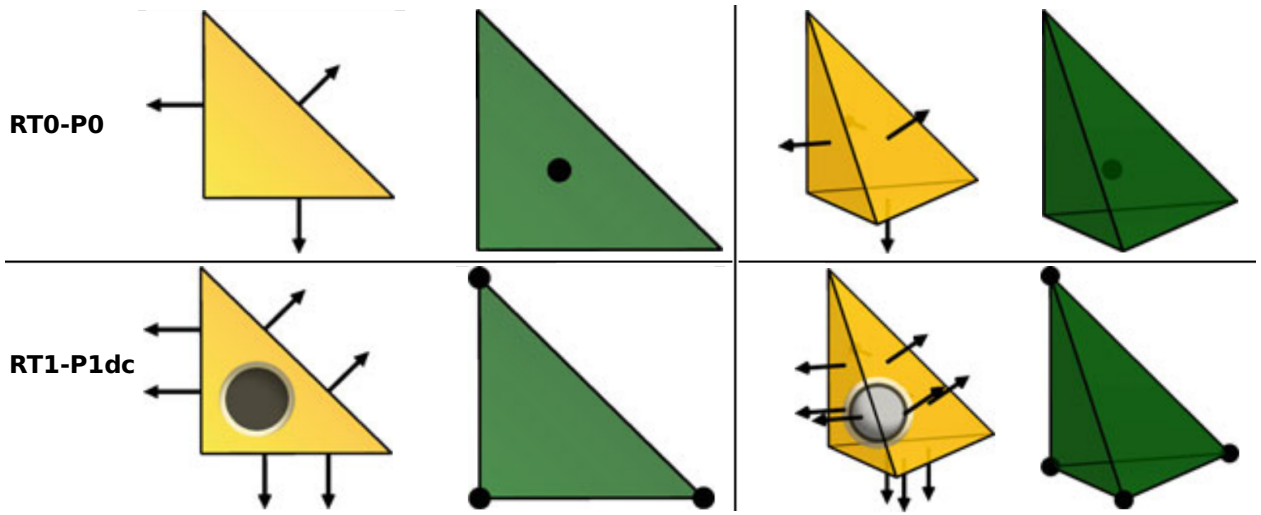
Formulación variacional discreta

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}} \times H_h^p$ tal que:

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h - \int_\Omega p_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) &= -\langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle_\Gamma \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}\,, \\ -\int_\Omega q_h \operatorname{div}(\mathbf{u}_h) &= -\int_\Omega f\, q_h \qquad \forall\, q_h \in H_h^p\,. \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}} := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega) : \quad \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{RT}_k(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

$$H_h^p := \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : \quad q_h|_T \in \mathrm{P}_k(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$



Tasas de convergencia

P1: Tiene solución?

P2: Como calcular $\mathbf{u}_h, p_h$?

P3: $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathrm{div};\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega}$? Orden de convergencia $\mathcal{O}(h^l)$?

$(\mathbf{AP}_h^{\mathbf{u}})$ existe una constante positiva C, independiente de h, tal que para cada $l \in (0, k+1]$ y para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^l \cap \mathbf{H}(\mathbf{div};\Omega)$ con $\mathrm{div}(\mathbf{v}) \in H^l(\Omega)$, se tiene

$$\mathrm{dist}\,(\mathbf{v}, \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}) := \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathrm{div};\Omega} \leq C\, h^l \left\{ \|\mathbf{v}\|_{l,\Omega} + \|\mathrm{div}(\mathbf{v})\|_{l;\Omega} \right\},$$

$(\mathbf{AP}_h^{p})$ existe una constante positiva C, independiente de h, tal que para cada $l \in [0, k+1]$ y para cada $q \in H^l(\Omega)$, se tiene

$$\mathrm{dist}\,(q, H_h^{p}) := \inf_{q_h \in H_h^{p}} \|q - q_h\|_{0,\Omega} \leq C\, h^l \, \|q\|_{l,\Omega}\,.$$

Manos al código ... iniciemos con nuestro segundo programa ...

Ejemplo 2D - Tasa de Convergencia para Formulación Mixta

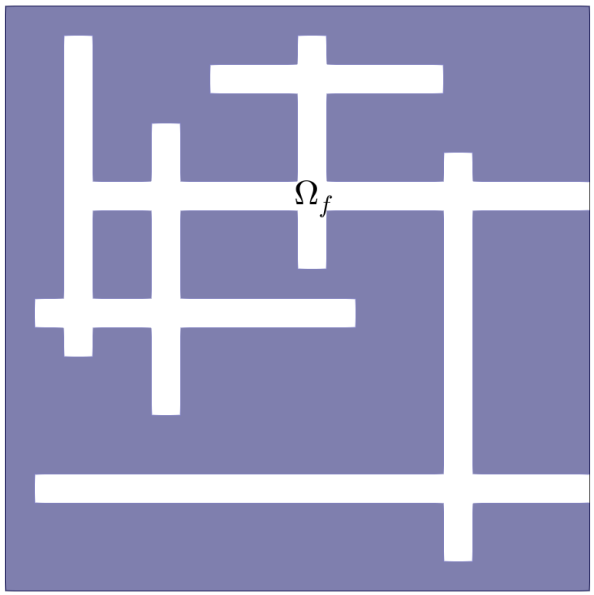
Solución para corroborar tasa de convergencia teórica

- $\Omega := (0,1) \times (0,1)$
- $\kappa = 1$
- $p(x,y) = \cos(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y)$
- $p_x(x,y) = -\pi\ \sin(\pi\, x)\, \sin(\pi\, y)$
- $p_y(x,y) = \pi\, \cos(\pi\, x)\, \cos(\pi\, y)$
- $\mathbf{u}(x,y) = -\kappa\, [p_x(x,y), p_y(x,y)]$
- $f = -\kappa\, (p_{xx}(x,y) + p_{yy}(x,y))$

Fluido en un medio poroso 2D con fracturas

Parámetros

- $\Omega = (-1, 1)^2$
- $\kappa = \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \Omega_{\mathrm{f}} \\ 0.1 & \text{en} \quad \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\mathrm{f}} \end{cases}$



$$p = \begin{cases} -0.5\,(x_2 - 1) & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{left}}\,, \\ -0.5\,(x_1 - 1) & \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{bottom}}\,, \end{cases}$$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_{\mathrm{right}} \cup \Gamma_{\mathrm{top}}\,,$$

Figure: Izquierda: dominio computacional. Derecha: condiciones de contorno.

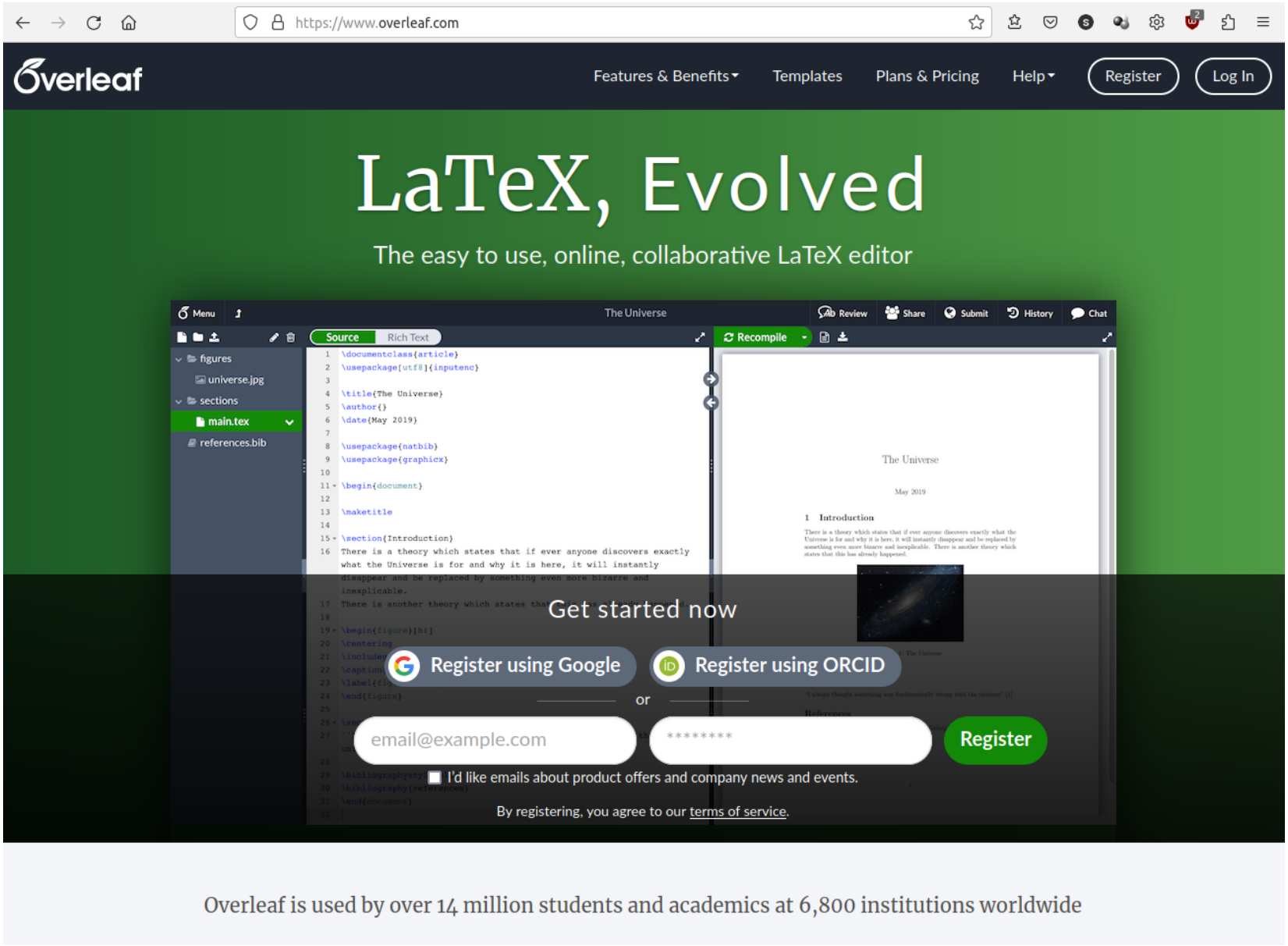
ParaView como una herramienta para crear imágenes de alta calidad

https://www.paraview.org



Actividad Integradora

Escribiendo un Artículo Científico en LaTeX con Overleaf.com



Cursos Electivos en el M2A-UCSC

- Teoría de Operadores Lineales
- Análisis Funcional
- Teoría de Elementos Finitos
- Aspectos Computacionales del Método de Elementos Finitos.
- Teoría de Elementos Finitos Mixtos
- Seminarios de Tesis I y II: FreeFem++, C++, y ParaView.

correo: scaucao@ucsc.cl

web: scaucao.github.io

Gracias por su atención!!!